

ΘΕΜΑ Α

- A_1 . Σχολικό βιβλίο 31.
 A_2 . Σχολικό βιβλίο 27.
 A_3 . Σχολικό βιβλίο 87.
 A_4 . α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B₁

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x-1=0 \quad \vee \quad 8x^2-6x+1=0.$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 36 - 32 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16} \quad \begin{matrix} + \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ - \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

Επειδή $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ έχουμε

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

οπότε $\boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}, \boxed{P(A) = \frac{1}{3}}, \boxed{P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$

B₂

$$P(A' - B') = P(A \cap B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) (=)$$

$$\text{Οπότε } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \left| \quad P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \right.$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\boxed{P(A' - B') = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}}$$

Δ: πραγματοποιείται το ποσό ένα από τα ενδεχόμενα A και B. Δηλαδή όχι και τα δύο.

$$\text{Οπότε } P(A) = P(A \cap B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} (=)$$

$$\boxed{P(A) = \frac{3}{4}}$$

B₃ E: "πραγματοποιείται μόνο ένα από τα
ευδεχόμενα A, B"

Δηλαδή μόνο το A ή μόνο το B.

αρα $P(E) = P(A-B) \cup (B-A)$

Τα ευδεχόμενα A-B, B-A αλληλοβιβάστα

Αρα
$$\begin{aligned} P(E) &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4}{12} - \frac{3}{12} + \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \\ P(A) &= \frac{3}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(E) = \frac{1}{4}}$$

B₄

$$9x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2) = 9 + 72 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 9} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \quad \frac{3+9}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3-9}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

οπότε $\boxed{P(\Gamma) = \frac{2}{3}}$ $\sim P(\Gamma) = -\frac{1}{3}$ αδύνατο αφού $0 \leq P(\Gamma) \leq 1$

Έστω B, Γ αλληλοβιβάστα τότε

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma)$$

$$P(B \cup \Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1 \text{ άρα } \Gamma, B \text{ δεν είναι αλληλοβιβάστα.}$$

Γ_1

(1)

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.

Αρα
$$F_1\% = 10\% = f_1\%$$

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι ίσες ή μεγαλύτερες του 16 είναι 30%.

Αρα
$$f_5\% = 30\%$$

- Το συνολικό ... 3^η κλάση είναι 108.

Αρα
$$f_3\% = \frac{108}{360} \cdot 100 \Leftrightarrow f_3\% = 30\%$$

- Η μέση τιμή των ... $\bar{x} = 14$.

$$14 = \sum x_i \cdot f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 + x_5 \cdot f_5$$

$$14 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3$$

$$14 = 0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1$$

$$11 f_2 + 15 f_4 = 4,1 \quad (1)$$

Επί πλέον $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1$ αρα.

$$f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ f_2 + f_4 = 0,3 \end{cases} \xrightarrow{x \leftarrow (1)} \begin{cases} 11f_2 + 15f_4 = 4,1 \\ -11f_2 - 11f_4 = -3,3 \end{cases} +$$

$$4f_4 = 0,8$$

$$f_4 = 0,2$$

$$\text{ογογι} \quad f_2 = 0,3 - 0,2$$

$$f_2 = 0,1$$

Επομένως $f_2\% = 10\%$
 $f_4\% = 20\%$

Γ₂

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	f_i	x_i^2	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[8, 10)	9	10	0,1	81	0,9	8,1
[10, 12)	11	10	0,1	121	1,1	12,1
[12, 14)	13	30	0,3	169	3,9	50,7
[14, 16)	15	20	0,2	225	3	45
[16, 18)	17	30	0,3	289	5,1	86,7
					14,0	202,6

Συνολο

$$S^2 = \sum x_i^2 \cdot f_i - \left(\sum x_i \cdot f_i \right)^2 = 202,6 - 14^2 = 202,6 - 196$$

$$S^2 = 6,6$$

$$S = \sqrt{6,6} \Leftrightarrow \boxed{S \approx 2,57}$$

$$\text{Αρα } CV = \frac{S}{|x|} = \frac{2,57}{14}$$

(2)

$$\text{Εστω } CV > 0,1 \Leftrightarrow \frac{2,57}{14} > 0,1 \Leftrightarrow 2,57 > 1,4 \text{ (αληθές)}$$

Αρα. Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ₃

$$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = 1780 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i}{v} = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot f_i = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow 8,9 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow \boxed{v = 200}$$

Γ₄

$$\theta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_{\alpha}} \Leftrightarrow \theta_i = \frac{1}{S_{\alpha}} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_{\alpha}}$$

Αρα, από την εφαρμογή του βελτιστικού γνωρίζουμε ότι

$$\bar{\theta} = \frac{1}{S_{\alpha}} \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_{\alpha}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\bar{\theta} = 0}} \quad S_{\theta} = \left| \frac{1}{S_{\alpha}} \right| \cdot S_{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \bar{\theta} = 0 \text{ άνοσηλότητα.}$$

$$S_{\theta}^2 = \frac{\sum (\theta_i - \bar{\theta})^2}{v} = \frac{\sum \left(\frac{1}{S_{\alpha}} \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_{\alpha}} - 0 \right)^2}{v} = \frac{\sum \left(\frac{1}{S_{\alpha}^2} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 \right)}{v}$$

$$= \frac{1}{S_{\alpha}^2} \frac{\sum (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{v} = \frac{1}{S_{\alpha}^2} \cdot S_{\alpha}^2 = 1$$

$$\text{Αρα } S_{\theta} = 1$$

Θέμα Δ

①

Δ₁. Η ΔΟΒ είναι εικονογραφικό κρού $\hat{A}=90^\circ$ οπότε

$$(AB)=2 \cdot 5=10.$$

Πυθαγόρειο τριπύκνισμα στο $\triangle ADB$.

$$(AD)^2 + (AB)^2 = (DB)^2 \Leftrightarrow (AD)^2 + x^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$(AD)^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow (AD) = \sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$$

$$E_{\text{οφθ.}} = (AB) \cdot (AD) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Άρα $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$ όπου $0 < x < 10$

Το εμβαδόν του οφθαλμίου.

$$\Delta_2. f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{(100 - x^2)'}{2\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} =$$

$$= \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 2 \cdot \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\bullet \text{ Πίπτει στο } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

• Πρόσημο στο $f'(x)$ -
μονοτονία στο $f(x)$.

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα η $f(x)$

έχει $x = 5\sqrt{2}$ ακρότατο μέγιστο το $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 50$

Τις $x=5\sqrt{2}$ έχουμε $(A\beta)=5\sqrt{2}$ και $(A\Delta)=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$. Άρα $(A\beta)=(A\Delta)$. Επομένως το ορθόγωνο $A\beta\gamma\Delta$ είναι ισοπλάγιο. (2)

Δ_3 . Τις $x=1$ είναι $f(1)=1\cdot\sqrt{100-1}=\sqrt{99}$.
 Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{98 \cdot x} =$

$$\frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{1}{98} \cdot f'(1).$$

$$\text{Άρα } f'(1) = \frac{\sqrt{100-1}-1}{\sqrt{99}} = \sqrt{99} - \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{99-1}{\sqrt{99}} =$$

$$= \frac{98}{\sqrt{99}}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98 \cdot x} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{1}{3\sqrt{11}} \quad (1)$$

Δ_4 . Έχουμε $A-B \subseteq A$ άρα $0 < P(A-B) \leq P(A) \leq 1 < 5\sqrt{2}$
 Επίσης η $f \uparrow$ στο $(0, 5\sqrt{2})$ έχουμε

$$P(A-B) \leq P(A) \Rightarrow f(P(A-B)) \leq f(P(A))$$

$$f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \Leftrightarrow$$

$$P(A-B) \cdot \sqrt{100-P^2(A-B)} \leq P(A) \cdot \sqrt{100-P^2(A)}$$

$$0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A)}} < 1 < 5\sqrt{2}$$

(3)

$$\text{Evidently } \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1 \Leftrightarrow$$

$$P^2(A) < 100 - P^2(A-B) \Leftrightarrow$$

$$P^2(A) + P^2(A-B) < 100 \text{ since } 16 \times 10 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Since } \begin{array}{l} P^2(A) \leq 1 \\ P^2(A-B) \leq 1 \end{array} \Bigg| +$$

$$P^2(A) + P^2(A-B) \leq 2 < 100.$$

$$\text{Furthermore } f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$

$$\text{Since } f \text{ is } \uparrow \text{ on } (0, 5\sqrt{2}]$$